[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし，根号を用いた分数は，分母を有理化した形で記入しなさい。

（1） 連続型確率変数 X のとる値の範囲が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ で，その確率密度関数が $f(x)$ であるとき，X の期待値 $m=E(X)$ と分散 $V(X)$ を次の式で定める。

$$m=E(X)=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)\,dx, \qquad V(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2 f(x)\,dx$$

連続型確率変数 Y のとる値の範囲が $0 \leqq Y \leqq \frac{\pi}{2}$ で，その確率密度関数が

$$g(y)=\sin 2y \qquad \left(0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

であるとき，$\frac{\pi}{4} \leqq Y \leqq \frac{3}{8}\pi$ となる確率は $\boxed{（あ）}$ である。また，$E(Y)=\boxed{（い）}$ であり，$V(Y)=\boxed{（う）}$ である。

（2） a を実数とし，2 つの集合 A と B を，それぞれ区間

$$A=\left[3(a+1),\ 3(a+2)\right], \qquad B=\left[a^3-4a,\ a^3-4a+2(a-1)^2+1\right]$$

と定める。集合 A, B のどちらにも属する要素があるための必要十分条件は，

$\boxed{（え）} \leqq a \leqq \boxed{（お）}$，または $\boxed{（か）} \leqq a \leqq \boxed{（き）}$，または $\boxed{（く）} \leqq a \leqq \boxed{（け）}$ である。ただし，$\boxed{（え）} < \boxed{（か）} < \boxed{（く）}$ とする。

（3） b を 0 でない実数とする。座標空間に平行四辺形 OPQR があり，その頂点の座標が

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0), \qquad \mathrm{P}(0,\ 1,\ -1), \qquad \mathrm{Q}(1,\ c,\ d), \qquad \mathrm{R}\left(1,\ b,\ \frac{1}{b}\right)$$

であるとき，b を用いて $c=\boxed{（こ）}$，$d=\boxed{（さ）}$ と表され，平行四辺形 OPQR の面積 $S(b)$ は，b を用いて $\sqrt{\boxed{（し）}}$ と表される。また，b が 0 でないすべての実数を動くとき，$S(b)$ の最小値は $\boxed{（す）}$ である。

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし，空欄(え)，(く)，(け)には n の式を入れ，それ以外の空欄には数を入れなさい。

袋が1つ，赤玉4個と白玉2個が用意されている。2個以上の玉が袋に入った状態に対して，操作Tの手順を次のように定める。

操作T

> 袋から玉を2個同時に取り出し，それらが2個とも赤玉である場合には袋に戻さず，それ以外の場合には2個とも袋に戻す。

n を自然数とする。赤玉4個と白玉2個が袋に入った状態から始めて，操作Tを n 回施し終えたときに，袋に入っている赤玉の個数を a_n とする。$a_n=4$ である確率を p_n とし，$a_n=2$ である確率を q_n とする。

(1) 次の関係式

$$p_{n+1}=\boxed{\text{(あ)}}\,p_n,\qquad q_{n+1}=\boxed{\text{(い)}}\,p_n+\boxed{\text{(う)}}\,q_n$$

が成り立つ。よって，n を用いて

$$p_n=\boxed{\text{(え)}},\qquad q_n=\boxed{\text{(お)}}\left\{\left(\boxed{\text{(か)}}\right)^n-\left(\boxed{\text{(き)}}\right)^n\right\}$$

と表される。ただし，$\boxed{\text{(か)}}>\boxed{\text{(き)}}$ とする。したがって，赤玉4個と白玉2個が袋に入った状態から始めて，操作Tを n 回施し終えたときに初めて袋の中の赤玉が0個になる確率は $\boxed{\text{(く)}}$ である。

(2) X_n を

$$a_n=4\text{ のとき }6,\qquad a_n=2\text{ のとき }3.5,\qquad a_n=0\text{ のとき }0$$

という値をとる確率変数とすると，X_n の期待値は $\boxed{\text{(け)}}$ であり，分散は

$$3\left\{\boxed{\text{(こ)}}\left(\boxed{\text{(さ)}}\right)^n+\boxed{\text{(し)}}\left(\boxed{\text{(す)}}\right)^n+\boxed{\text{(せ)}}\left(\boxed{\text{(そ)}}\right)^n\right\}$$

である。ただし，$\boxed{\text{(さ)}}>\boxed{\text{(す)}}>\boxed{\text{(そ)}}$ とする。

(3) N を自然数とする。赤玉4個と白玉2個が袋に入った状態から始めて操作Tを N 回施す。操作Tを n 回（ただし $1\leqq n\leqq N$）施し終えたときに初めて袋の中の赤玉が0個になった場合に，2^{N-n} 点を得るというゲームを考える。ただし，操作Tを N 回施し終えたときに，袋の中に赤玉が1個以上入っている場合の得点は0点とする。このゲームの得点の期待値は，

$$\boxed{\text{(た)}}\left\{\left(\boxed{\text{(ち)}}\right)^N+\boxed{\text{(つ)}}\left(\boxed{\text{(て)}}\right)^N+\boxed{\text{(と)}}\left(\boxed{\text{(な)}}\right)^N\right\}$$

である。ただし，$\boxed{\text{(ち)}}>\boxed{\text{(て)}}>\boxed{\text{(な)}}$ とする。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数，記号または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問(5)に答えなさい。

以下の設問(1)～(7)を通じて，i を虚数単位とし，

$$z=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi,\qquad a=z+\frac{1}{z}$$

とする。

(1) $z^r=1$ を満たす自然数 r の中で，最小のものを k とすると，$k=\boxed{(あ)}$ であり，どんな自然数 l に対しても，z^l は 1 の $\boxed{(あ)}$ 乗根である。$z-1\neq 0$ であるから，等式

$$\frac{z^k-1}{z-1}=0$$

が成り立つ。また，$a=2\cos\left(\boxed{(い)}\pi\right)$ である。ただし，$0<\boxed{(い)}<1$ とする。次に，a を用いて $z^2+\frac{1}{z^2}=\boxed{(う)}$，$z^3+\frac{1}{z^3}=\boxed{(え)}$ と表される。以上のことから，a は整数を係数とする 3 次方程式 $x^3+\boxed{(お)}x^2+\boxed{(か)}x+\boxed{(き)}=0$ の解であり，この方程式の a 以外の 2 つの解は

$$b=2\cos\left(\boxed{(く)}\pi\right),\qquad c=2\cos\left(\boxed{(け)}\pi\right)$$

と表される。ただし，$0<\boxed{(く)}<\boxed{(け)}<1$ とする。

(2) 不等式 $\sqrt{m}<a<\sqrt{m+1}$ を満たす自然数 m は $\boxed{(こ)}$ である。

(3) 不等式 $\sqrt{\frac{n}{10}}<a<\sqrt{\frac{n+1}{10}}$ を満たす自然数 n は $\boxed{(さ)}$ である。

(4) a, $|b|$, $|c|$ の大小関係は，$\boxed{(し)}<\boxed{(す)}<\boxed{(せ)}$ である。ただし，(し)，(す)，(せ)には，それぞれ a, $|b|$, $|c|$ のいずれか 1 つを記入しなさい。

(5) a, $|b|$, $|c|$ を 3 辺の長さとする三角形が存在するかどうか，理由とともに答えなさい。

(6) 複素数平面上の原点 O と 2 点 A(z^3)，B(iz) を考える。直線 OA に関して点 B と対称な点を表す複素数 γ は，a を用いて $\gamma=\boxed{(そ)}z^3+\boxed{(た)}iz$ と表される。ただし，(そ)，(た)は実数とする。

(7) $w=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とする。自然数 d が $1\leqq d\leqq 2026$ の範囲を動くとき，$|z^d+w^d|$ の最大値は $\boxed{(ち)}$ であり，$|z^d+w^d|=\boxed{(ち)}$ を満たす d の個数は $\boxed{(つ)}$ である。

[Ⅳ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし，根号を用いた分数は，分母を有理化した形で記入しなさい。

a を正の実数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2} \qquad (x>1)$$

と定める。

（1） 曲線 $y=f(x)$ が x 軸と接するとき，$a=\boxed{\text{（あ）}}$ であり，その接点の x 座標は $\boxed{\text{（い）}}$ である。

（2） $a=\boxed{\text{（あ）}}$ とする。関数 $f(x)$ は $x=\boxed{\text{（う）}}$ で極大値 $\boxed{\text{（え）}}$ をとる。$c=\boxed{\text{（え）}}$ とおくと，方程式 $f(x)=c$ の解は $x=\boxed{\text{（う）}}$ および $x=\boxed{\text{（お）}}$ であり，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=c$ で囲まれた部分の面積は，

$$\frac{\boxed{\text{（か）}}+\boxed{\text{（き）}}\sqrt{\boxed{\text{（く）}}}}{2}+\log\left(\frac{\boxed{\text{（け）}}+\boxed{\text{（こ）}}\sqrt{\boxed{\text{（く）}}}}{2}\right)$$

である。ただし，(か)～(こ) は整数とする。

（3） 関数 $f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，$a>\boxed{\text{（さ）}}$ である。

（4） $\alpha=\boxed{\text{（さ）}}$ とおき，$a>\alpha$ とする。また，関数 $f(x)$ が極大値をとる x の値を $g(a)$ とする。$g(a)-3$ は，t についての 3 次方程式

$$t^3+\boxed{\text{（し）}}t^2+\boxed{\text{（す）}}t+\boxed{\text{（せ）}}=0$$

の解である。ここで，(し)，(す)，(せ) は，整数を係数とする a についての多項式とする。したがって，$\displaystyle\lim_{a\to\alpha+0}\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}=\boxed{\text{（そ）}}$ である。次に，x についての方程式 $f(x)=f(g(a))$ の $x=g(a)$ 以外のもう 1 つの解を $h(a)$ とすると，$\displaystyle\lim_{a\to\alpha+0}\frac{h(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}=\boxed{\text{（た）}}$ である。さらに，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=f(g(a))$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると，$\displaystyle\lim_{a\to\alpha+0}\frac{S(a)}{(a-\alpha)^2}=\boxed{\text{（ち）}}$ である。